II) Задача для неоднородного уравнения

$$(2)\quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l,\ t>0, \\ \Gamma_0(u)=0, \quad \Gamma_l(u)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $u=u(x,t)=?$ $f(x,t)$, $\varphi(x)$ заданы. Ур-е неоднородное, т.е. $f(x,t)\not\equiv 0$.

Функция $f(x,t)$ выражает плотность дополнительных источников (или поглотителей) тепла, действующих в системе.

Решение (метод Фурье). З. Ш.-Л. $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0\le x\le l, \\ \Gamma_0(X)=0, \quad \Gamma_l(X)=0. \end{cases}$

Спектр: λ_k, $X_k(x)$. Разложим все ф-ции в з. (2) по системе $\{X_k(x)\}$:

$u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x)$, $T_k(t)=?$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_k A_k X_k(x), \\ f(x,t) &= \sum_k f_k(t) X_k(x). \end{aligned}\right\}$$ A_k, $f_k(t)$ находятся в явном виде по формулам Фурье.

Подставим разложения в з. (2) (краевые условия выполняются автоматически):

$$\begin{cases} \sum_k T_k'(t)X_k(x) = a^2\sum_k T_k(t)\left(-\lambda_k X_k(x)\right) + \sum_k f_k(t)X_k(x), \\ \sum_k T_k(0)X_k(x) = \sum_k A_k X_k(x). \end{cases}$$

Принцип единственности: ряды Фурье равны $\Longleftrightarrow$ когда все их коэффициенты совпадают.

Приравниваем коэффициенты Фурье. Получаем счетный набор з. Коши для ОДУ:

$$\begin{cases} T_k'(t) = -a^2\lambda_k T_k(t) + f_k(t), & t\ge 0, \\ T_k(0)=A_k. \end{cases}$$ Решаем методом вариации постоянной.

Л.О.: $T_k'(t)=-a^2\lambda_k T_k(t) \Rightarrow T_k(t)=C_k e^{-a^2\lambda_k t}$

ЛНО: $C_k=C_k(t) \Rightarrow C_k'(t)e^{-a^2\lambda_k t} \cancel{- a^2\lambda_k C_k(t)e^{-a^2\lambda_k t}} = \cancel{-a^2\lambda_k C_k(t)e^{-a^2\lambda_k t}} + f_k(t).$

$\Rightarrow C_k'(t)=e^{a^2\lambda_k t}f_k(t)$. Кроме того, $C_k(0)=A_k$. $\Longrightarrow$

$C_k(t)=A_k+\int_0^t e^{a^2\lambda_k \tau}f_k(\tau)\,d\tau$. $\Longrightarrow$

$$T_k(t)=A_k e^{-a^2\lambda_k t}+\int_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau.$$

Подставим функции $T_k(t)$ в ряд для $u(x,t)$.

Окончательный ответ:

$$
(2.1)\quad \begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_k A_k e^{-a^2\lambda_k t} X_k(x) + \sum\limits_k \int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \cdot X_k(x), \quad \text{где} \\ A_k = \dfrac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^l \varphi(x) X_k(x)\,dx, \qquad f_k(t) = \dfrac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^l f(x,t) X_k(x)\,dx. \end{cases}
$$

Структура ответа:

$$
u(x,t) = \left\{ \begin{matrix} \text{решение однородного ур-я } u_t = a^2 u_{xx} \\ \text{с нач. условием } u(x,0)=\varphi(x). \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{решение неодн. ур-я } u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ \text{с однородным нач. условием } u(x,0)=0. \end{matrix} \right\}
$$

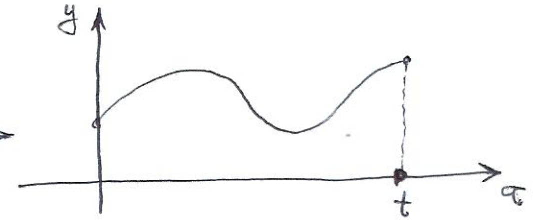
Интеграл $\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau$ наз. сверткой функций $e^{-a^2\lambda_k t}$ и $f_k(t)$.

NB Свертка на полуоси: $g_1(t), g_2(t)$ при $t \geq 0 \implies h(t) = (g_1 * g_2)(t) \equiv \int\limits_0^t g_1(t-\tau) g_2(\tau)\,d\tau, \; t \geq 0.$

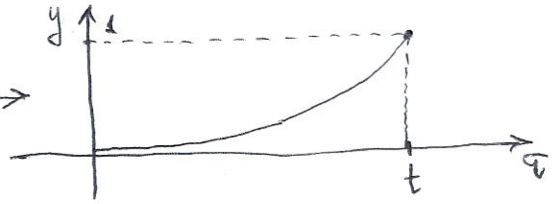
Итак, решение неоднородного уравнения записывается через свертки по переменной t.

Смысл свертки.

$f_k(\tau) \longrightarrow$



$e^{-a^2\lambda_k(t-\tau)} = e^{a^2\lambda_k(\tau-t)} \longrightarrow$



При перемножении и интегрировании вклад от „старых" значений $f(\tau)$ при $\tau \ll t$ будет мал, а вклад от „последних" значений $f(\tau)$ при $\tau \approx t$ велик. Чем больше λ_k тем сильнее выражен этот процесс — высокие гармоники быстрее „забывают" про то, что было.

Вывод. Свертка ответственна за распределение вклада по t от неоднородного слагаемого $f(x,t)$.

NB В конкретных примерах (на семинарах) все A_k, $f_k(t)$ вычисляются явно, задачи Коши для ОДУ решаются непосредственно, и никаких „сверток" не возникает.

III) Общий случай — неоднородные краевые условия

$$(3)\quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l,\ t>0, \\ \Gamma_0(u) = \mu_0(t), & \Gamma_l(u) = \mu_1(t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

$u = u(x,t) = ?$ Функции $f(x,t)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $\varphi(x)$ заданы, т.е. ур-е и краевые условия неоднородные.

Ф-ции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ выражают взаимодействие с окружающей средой при $x=0$ и $x=l$ (на краях стержня).

Например: $u(0,t) = \mu_0(t)$, $u_x(l,t) = \mu_1(t)$ — на левой границе задана изменяющаяся температура, на правой границе — изменяющийся входящий тепловой поток.

Решение. Для $\forall$ пары классических краевых операторов Γ_0, Γ_l всегда можно выбрать пару функций $w_0(x)$, $w_1(x)$ (зависящих только от x) так, чтобы

$$(3.0)\ \begin{cases} \Gamma_0(w_0) = 1, \\ \Gamma_l(w_0) = 0. \end{cases} \qquad (3.1)\ \begin{cases} \Gamma_0(w_1) = 0, \\ \Gamma_l(w_1) = 1. \end{cases}$$

Обычно $w_0(x)$, $w_1(x)$ — полиномы, $\deg w_j(x) \le 2$, $j = 1,2$ (индикаторные полиномы).

Подбор осуществляется элементарным вычислением. Например,

$$\Gamma_0(w) \equiv w(0), \quad \Gamma_l(w) \equiv w(l). \implies w_0(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad w_1(x) = \frac{x}{l}.$$

Пусть $w_0(x)$, $w_1(x)$ — индикаторные полиномы для Γ_0, Γ_l из задачи (3). Положим

$$u(x,t) = v(x,t) + \underbrace{w_0(x)\mu_0(t) + w_1(x)\mu_1(t)}_{\text{явно заданная функция}}, \quad v(x,t) = ?$$

Подставим такую $u(x,t)$ во все соотношения (3):

$$\begin{cases} v_t + w_0(x)\mu_0'(t) + w_1(x)\mu_1'(t) = a^2 v_{xx} + a^2\big(w_0''(x)\mu_0(t) + w_1''(x)\mu_1(t)\big) + f(x,t), \\ \Gamma_0(v) + 1\cdot\mu_0(t) + 0\cdot\mu_1(t) = \mu_0(t), \quad \Gamma_l(v) + 0\cdot\mu_0(t) + 1\cdot\mu_1(t) = \mu_1(t), \\ v(x,0) + w_0(x)\mu_0(0) + w_1(x)\mu_1(0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Коротко

$$(3.2)\quad \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t), \\ \Gamma_0(v) = 0, \quad \Gamma_l(v) = 0, \\ v(x,0) = \tilde{\varphi}(x). \end{cases}$$

Здесь $v = v(x,t) = ?$

$\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{\varphi}(x)$ явно заданные функции.

$\overline{f}(x,t) \equiv f(x,t) + a^2(w_0''(x)\mu_0(t) + w_1''(x)\mu_1(t)) - w_0(x)\mu_0'(t) - w_1(x)\mu_1'(t)$,

$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - w_0(x)\mu_0(0) - w_1(x)\mu_1(0)$.

В итоге получим з. (3.2), разобранную в п. II). Её решение выписывается по ф-ле типа (2.1).

Ответ. Решение з. (3) имеет вид $u(x,t) = w_0(x)\mu_0(t) + w_1(x)\mu_1(t) + v(x,t)$, где $v(x,t)$ находится из соответствующей з. (3.2).

В основе случая III) лежит общий принцип:
линейное дифференциальное уравнение с неоднородными краевыми условиями всегда можно свести к уравнению с однородными краевыми условиями и новым неоднородным слагаемым.

Схема: $L(u) = f$, $\Gamma(u) = \mu$.

Здесь L - линейный дифференциальный оператор в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Γ - краевой оператор на $\partial\Omega$.

Подбираем ф-цию $w(x)$: $\Gamma(w) = \mu$ (удовлетворяет только краевым условиям!).

Замена: $u = v + w$, $v = ?$ w - задана. $\Longrightarrow$

$L(v) = \tilde{f}$, $\Gamma(v) = 0$, где $\tilde{f} = f - L(w)$ - новая заданная функция.

Краевые условия „обнуляются".

NB Функция w зависит от произвола. При изменении w ф-ция v тоже изменится. Но сумма $u = v + w$ будет одной и той же, если в исходной задаче есть единственность решения. Фактически формула $u = v + w$ дает различные записи для одного и того же решения.

Окончательный вывод в §. Метод Фурье позволяет получить решение в любой классической задаче для одномерного ур-я теплопроводности.

Пока это „формальные решения", но скоро мы покажем, что они являются очень хорошими.

Упр. Дать общие схемы метода Фурье в основных задачах для одномерного ур-я колебаний:

I) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \ t>0, \\ \Gamma_0(u) = \Gamma_l(u) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$

II) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \underline{f(x,t)}, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$

III) $\begin{cases} \ldots\ldots \\ \Gamma_0(u) = \mu_0(t), \quad \Gamma_l(u) = \mu_1(t), \\ \ldots\ldots \end{cases}$